(Ασκήσεις) 1.49, 50, 52, 56, 54

04/04/2019

$f: D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό, $z_0 \in D$

f: $\mathbb{C}$-διαφ. στο $z_0 \iff \exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$

$f'(z_0) \in \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-παράγωγος της f στο z_0

$\underbrace{f'(z_0)}_{\text{ως συνάρτηση}}(z) = \underbrace{f'(z_0)}_{\in \mathbb{C}} z$, $z \in \mathbb{C}$

$f'(z_0): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

(παράγωγος)

$\mathbb{C}$ διαφορ. της f στο z_0

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}$ $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0} = 0$

f διαφορίσιμη στο $z_0 \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}: \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0) - \mu(\overline{z - z_0})}{z - z_0} = 0$

με $\underbrace{df_{z_0}}_{= Df(z_0)}(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$, η $\mathbb{R}$ παράγωγος της f (διαφορικό) στο z_0

[$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = \lambda z$, $z \in \mathbb{C} \Rightarrow f$: $\mathbb{C}$-γραμμική

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$, $z \in \mathbb{C} \Rightarrow f$: $\mathbb{R}$-γραμμική]

[Λογικά το $\mathbb{R}$-διαφορικό $df_{z_0}(z)$ αντιστοιχεί στην ($\mathbb{R}$-) παράγωγο

$$\begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} :$$

Πράγματι, $df_{z_0}(z) = \lambda z + \mu \bar{z} = (\lambda_1 + i\lambda_2)(x + iy) + (\mu_1 + i\mu_2)(x - iy) =$

$= \lambda_1 x - \lambda_2 y + \mu_1 x + \mu_2 y + i(\lambda_2 x + \lambda_1 y + \mu_2 x - \mu_1 y)$ $\underline{\underline{\text{αντιστοιχεί}}}$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 & -\lambda_2 + \mu_2 \\ \lambda_2 + \mu_2 & \lambda_1 - \mu_1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (*)$$]

S.O.S. f: $\mathbb{C}$-διαφ. στο z_0 $\Leftrightarrow$ f: $\mathbb{R}$-διαφ. στο z_0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}: D \to \mathbb{R}^2$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ $\overset{\text{ΕΧ}=0}{,}$ $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$

[με $z = x+iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$

$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$]

Είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη στο (x_0,y_0) και:

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) = -u_y(x_0,y_0) \end{cases}$$ Εξισώσεις CR (Cauchy-Riemann)

$f'(z_0) = f_x(x_0+iy_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) = i(u_y(x_0,y_0) + iv_y(x_0,y_0)) =$

$= -i f_y(x_0+iy_0)$

Επίσης, $df_{z_0}(z) = (u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0))x + (u_y(x_0,y_0) + iv_y(x_0,y_0))y =$

$= f_x(z_0)x + f_y(z_0)y$

αν f: $\mathbb{R}$-διαφ. στο z_0 $\exists$ το $\mathbb{R}$-διαφ.

και αν επιπλέον f: $\mathbb{C}$-διαφ. στο z_0 τότε ισχύουν οι εξισώσεις CR

και άρα $df_{z_0}(z) = (u_x(x_0,y_0) + iv_y(x_0,y_0))x + (-v_x(x_0,y_0) + iu_x(x_0,y_0))y =$

$= (u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0))(x+y) = f'(z_0)z$

(f: $\mathbb{C}$-διαφ. $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ διαφορικό $=$ $\mathbb{R}$ διαφορικό $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}$ παράγωγος $=$ $=\mathbb{R}$ παράγωγος)

Π.χ. ακέραιαι (= ολόμορφαι στο $\mathbb{C}$ = μιγ. διαφ. $\forall z \in \mathbb{C}$) $f(z) = c$, $c \in \mathbb{C}$

$f(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$

αλλά $f(z) = \bar{z}$ δεν είναι πουθενά μιγ. διαφ. αφού $\forall z_0 \in \mathbb{C}$

$\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim\limits_{w \to 0} \dfrac{\bar{w}}{w} \nexists$ ενώ το αντίστοιχο δ.π. $f(x+iy) =$

$= u(x,y) + iv(x,y) = x - iy \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ και $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

Συνεπώς, «το αν ένα δ.π. αντιστοιχεί σε μιγαδικά διαφορίσιμη μιγαδική συνάρτηση, δεν είναι ζήτημα λειότητας (δηλ. πόσες φορές είναι συνεχώς μερικώς διαφ.) αλλά της δομής της παραγώγου

[Ενώ για $f(z) = z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$]

[$f(z)=c \Rightarrow f'(z)=0$, $f(z)=z \Rightarrow f'(z)=1$]. Ακόμα, άλγεβρα παραγώγισης ή απόδειξης με ορισμό (βλ. όρια) $f(z)=z^n$, $n=0,1,\dots \Rightarrow f'(z)=n z^{n-1}$ $\forall z\in\mathbb{C}$ (άρα f ακέραια) $\Rightarrow$ πολυώνυμα του z (ρητές συναρτήσεις του z ακέραια/ ολόμορφες όπου ορίζονται $f(z)=\frac{1}{z^n}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $n=0,1,\dots \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(z) = -n\frac{1}{z^{n+1}}$ $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (επιβεβαιώστε τα παραπάνω προς γενικά, δικαιολογημένα, ως άσκηση).

Επίσης, με εξίσωση CR είδαμε: $f(z)=e^z \Rightarrow f'(z)=e^z$ $\forall z\in\mathbb{C}$
($f(x+iy) = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \overset{\text{αντιστοιχεί}}{\equiv} \begin{pmatrix} e^x\cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow D\begin{pmatrix} e^x\cos y \\ e^x\sin y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f'(x+iy) = f_x(x+iy) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^{x+iy}$]

(Π.χ.) Η λογαριθμική συνάρτηση $\log : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $\log z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$
Είδαμε ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0] \xRightarrow[\text{ΠΡΟΣΟΧΗ για αυτήν της συνάρτηση, όχι γενικά}]{}$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

[«κουφό» αφού συνήθως διαφορίσιμη
$\Rightarrow$ συνεχής
$\not\Leftarrow$ συνεχής]

Πρόταση: Έστω $D\subset\mathbb{C}$ ανοικτό και $g: D\to\mathbb{C}$ συνεχής με $f = \exp\circ g : D\to\mathbb{C}$ ολόμορφη $\Rightarrow$ η g είναι ολόμορφη με μιγ. παράγωγο: $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$, $z\in D$

[Εφαρμογή της με $g(z) = \log z$, $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ δίνει $(\log z)' = 1/z$]

Απόδειξη: Έστω $z_0\in D$. Θ.ν.δ.ο. $\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$

(1) Έστω $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow \exists\, \delta>0$ $\forall z\in D(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}\subset D$:

$f(z) \neq f(z_0) \Rightarrow g(z) \neq g(z_0)$

[(∗) Αφού $f'(z_0) \neq 0$ θέτοντας $\varepsilon = \frac{|f'(z_0)|}{2} > 0$ έχουμε $\exists \delta > 0, \forall z \in D$ με:

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \frac{|f'(z_0)|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{|f'(z_0)|}{2} < \underbrace{|f'(z_0)| - \underbrace{\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right|}_{< \frac{|f'(z_0)|}{2}}}_{> - \frac{|f'(z_0)|}{2}} \leq \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow |f(z) - f(z_0)| > 0$]

Άρα με τα δεδομένα της υπόθεσης $\forall (z_n) \subset D \setminus \{z_0\}$ με $z_n \to z_0$ $\exists \delta > 0$ $\forall n \geq n_0$:
$0 < |z_n - z_0| < \delta \Rightarrow g(z_n) \neq g(z_0)$ και $f(z_n) \neq f(z_0)$ και $z_n \to z \Rightarrow$
$\Rightarrow g(z_n) \to g(z) \Rightarrow \frac{f(z_n) - f(z_0)}{g(z_n) - g(z_0)} \to f(z_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{g(z_n) - g(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{g(z_n) - g(z_0)}{f(z_n) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} \to \frac{f'(z_n)}{f'(z_0)}$$

(2) Έστω $f'(z_0) = 0$. $(z_n) \subset D \setminus \{z_0\}$ με $z_n \to z_0$ και $\varepsilon > 0$. Αν το $N = \{ n \in \mathbb{N} : g(z_n) \neq g(z_0) \}$ έχει άπειρο πλήθος στοιχείων, τότε το N είναι εικόνα μιας υπακολουθίας $(k_n) \subset (n)$ με:

$$z_{k_n} \to z_0 \xRightarrow[\text{exp αντίστροφα} \neq 0]{g \text{ συνεχής}} \left| \frac{f(z_{k_n}) - f(z_0)}{g(z_{k_n}) - g(z_0)} \right| \geq \frac{|f(z_0)|}{2} > 0 \quad \forall n \geq n_0$$

για τυχαίο $n_1 \xRightarrow{\text{και}} \exists n_2 : \forall n \geq n_2 \quad \left| \frac{f(z_{k_n}) - f(z_0)}{z_{k_n} - z_0} \right| < \varepsilon \frac{|f(z_0)|}{2}$

$$\Rightarrow \left| \frac{g(z_{k_n}) - g(z_0)}{z_{k_n} - z_0} \right| = \left| \frac{g(z_{k_n}) - g(z_0)}{f(z_{k_n}) - f(z_0)} \right| \left| \frac{f(z_{k_n}) - f(z_0)}{z_{k_n} - z_0} \right| < \varepsilon.$$